

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Giới hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số thực L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (với c là hằng số).

Định lý về giới hạn hữu hạn:

- Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ khi đó:

$$\oplus \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L + M.$$

$$\oplus \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M.$$

$$\oplus \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L - M.$$

$$\oplus \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0 \text{)}.$$

- Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x \neq x_0$)

2 Giới hạn một bên

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Số thực L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0^+$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Số thực L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0^-$.

Định lý: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$

Nguyên lý kẹp: Cho ba hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định trên K chứa điểm x_0 .

Nếu $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \forall x \in K$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

3 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số thực L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số thực L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Lưu ý:

Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$.

Định lý về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow \pm\infty$.

4 Giới hạn vô cực của hàm số

Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự các định nghĩa về giới hạn hữu hạn.

Chẳng hạn, giới hạn $-\infty$ của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới $+\infty$ được định nghĩa như sau:

Định nghĩa giới hạn vô cực: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n > a, x_n \rightarrow +\infty$, ta có $(f(x_n)) \rightarrow -\infty$. **Kí hiệu:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = -\infty$.

Tính chất:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k là số lẻ.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k là số chẵn.

5 Quy tắc tìm giới hạn vô cực của hàm số

Các định lí sau vẫn đúng cho các trường hợp $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$.

Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$:

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

Dấu của L	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
-	$+\infty$	$-\infty$
-	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$:

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0$ với mọi $x \neq x_0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ được

tính theo quy tắc trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
−	$+\infty$	$-\infty$
−	$-\infty$	$+\infty$

Phương pháp:

Bài toán 1: Cả tử số và mẫu số đều là các đa thức

- Biểu thức có dạng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x), g(x)$ là các đa thức và $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
- Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$: phân tích tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung là $x - x_0$.
- Giả sử $f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$
- Khi đó: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Nhận xét:

- Nếu giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ vẫn ở dạng vô định $\frac{0}{0}$ thì ta lặp lại quá trình trên cho đến khi không còn dạng vô định.
- Việc phân tích thành nhân tử ở trên được thực hiện bằng phương pháp chia Horner.

Bài toán 2: Cả tử số và mẫu số đều là căn thức

- Biểu thức có dạng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x), g(x)$ là các căn thức và $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
- Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$: nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn để trục các nhân tử $x - x_0$ ra khỏi căn thức, nhằm khử các thành phần có giới hạn bằng 0.

Nhận xét: Có thể nhân liên hợp một hoặc nhiều lần để khử dạng vô định.

Chú ý: Các hằng đẳng thức:

- $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
- $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 + x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x + 2}{2|x| + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x + 1}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n}{x + x^2 + \dots + x^m}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}$

Lời giải

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(-3)^2 - 9}{-3 - 3} = 0.$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x} = \frac{1+0+0^2+0^3}{1+0} = 1.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-1|}{x^4+x-3} = \frac{|-1-1|}{(-1)^4-1-3} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-5x+2}{2|x|+1} = \frac{(-2)^2-5(-2)+2}{2|-2|+1} = \frac{16}{5}.$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1} = \frac{\sqrt{3(-1)^2+1}-(-1)}{(-1)-1} = \frac{-3}{2}.$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) = \sqrt{1+\sqrt{2}} - 1.$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2} = 0 \cdot \sin \frac{1}{2} = 0.$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x+1} = \frac{1+1^2+\dots+1^n-n}{1+1} = \frac{n-n}{2} = 0.$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n}{x+x^2+\dots+x^m} = \frac{1+1^2+\dots+1^n}{1+1^2+\dots+1^m} = \frac{n}{m}.$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\text{l) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x^3\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}} = \frac{0}{2} = 0$$

Bài tập 2: Tính các giới hạn sau đây:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-5x+2}{1-2x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x^3}{1-x^2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-9}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{2x^2-5x+2}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2-7x-4}{x^2+x-20}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{-x^3+x+6}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2-3x-7}{x^3+1}$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+x-6)^2}{-x^3+2x^2}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{a) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-2)}{x(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-2}{x} = \frac{-4-2}{-4} = \frac{3}{2} \\
\text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{1 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(x-2)}{1-2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2-x) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x+3} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2+3} = \frac{3}{5} \\
\text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x^3}{1-x^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{(1+x)(1-x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x+x^2}{1-x} = \frac{1-(-1)+(-1)^2}{1-(-1)} = \frac{3}{2} \\
\text{e) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6} \\
\text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{2x^2-5x+2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{2x-1} = \frac{5}{3} \\
\text{g) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2-7x-4}{x^2+x-20} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(2x+1)}{(x-4)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+5} = 1 \\
\text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{-x^3+x+6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(-x^2-2x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5x+1}{-x^2-2x-3} = -\frac{15}{11} \\
\text{i) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2-3x-7}{x^3+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(4x-7)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x-7}{x^2-x+1} = -\frac{11}{3} \\
\text{j) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+x-6)^2}{-x^3+2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(x+3)^2}{-x^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)^2}{-x^2} = 0
\end{aligned}$$

Bài tập 3: Tính các giới hạn sau đây:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{2x} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{9+x}-3} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}} \\
\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} & \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}+x+4}{x^3-4x^2+3} \\
\text{g) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}} & \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}
\end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x(\sqrt{1+2x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1+2x}+1)} = \frac{1}{2} \\
\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{9+x}-3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{9+x}+3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [4(\sqrt{9+x}+3)] = 24 \\
\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{-(x-1)(\sqrt{2x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(2+\sqrt{x+3})}{-(\sqrt{2x+7}+3)} = -\frac{4}{3} \\
\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{1+x^2}+1} = 4
\end{aligned}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})}{2(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}}{2(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})} = \frac{1}{4}.$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3 + x - 1}{x^3 - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+7} + 3} + x - 1}{(x-1)(x^2 - 3x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{\sqrt{2x+7} + 3} + 1}{x^2 - 3x - 3} = -\frac{4}{15}.$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{2x + \sqrt{3x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)(2x - \sqrt{3x^2 + 1})}{4x^2 - (3x^2 + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)(2x - \sqrt{3x^2 + 1})}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - \sqrt{3x^2 + 1}) = 2(-1) - \sqrt{3(-1)^2 + 1} = -4$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 5\sqrt{x-1}}{3 - \sqrt{x+4}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{[4x^2 - 25(x-1)](3 + \sqrt{x+4})}{(9 - (x+4))(2x + 5\sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(4x^2 - 25x + 25)(3 + \sqrt{x+4})}{(5-x)(2x + 5\sqrt{x-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(4x-5)(3 + \sqrt{x+4})}{(5-x)(2x + 5\sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5-4x)(3 + \sqrt{x+4})}{2x + 5\sqrt{x-1}} = \frac{(5-4.5)(3 + \sqrt{5+4})}{2.5 + 5\sqrt{5-1}} = -\frac{9}{2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{12x+1}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (12x+1)}{4x \left[1 + \sqrt[3]{12x+1} + \sqrt[3]{(12x+1)^2} \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-12x}{4x \left[1 + \sqrt[3]{12x+1} + \sqrt[3]{(12x+1)^2} \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{1 + \sqrt[3]{12x+1} + \sqrt[3]{(12x+1)^2}} = \frac{-3}{1 + \sqrt[3]{12 \cdot 0 + 1} + \sqrt[3]{(12 \cdot 0 + 1)^2}} = -1$$

Dạng 2: Tính giới hạn của hàm số tại vô cực

Phương pháp:

Dạng 1: $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x), Q(x)$ là các đa thức hoặc các hàm số.

- Gọi $p = \deg P(x)$, $q = \deg Q(x)$ và $m = \min(p, q)$.

Chia cả tử và mẫu cho x^m ta có kết luận. ($\deg P(x)$ là bậc cao nhất của đa thức $P(x)$).

- Khi đó:

Nếu $p \leq q$ thì tồn tại giới hạn.

Nếu $p > q$ thì không tồn tại giới hạn.

Deg = bậc của đa thức

Dạng 2: Giới hạn $\infty - \infty$.

Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Dạng 3: Giới hạn $0 \cdot \infty$.

Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Các công thức liên hợp thường gặp:

$$\oplus \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

$$\oplus \sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$$

$$\oplus \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A - B}{(\sqrt[3]{A})^2 + \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} + (\sqrt[3]{B})^2}$$

$$\oplus \sqrt[3]{A} - B = \frac{A - B^3}{(\sqrt[3]{A})^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + (B)^2}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$

b) $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}$

c) $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$

d) $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$

e) $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1}$

f) $F = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1}$

g) $G = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 3}{x - 4}$

h) $H = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x + 3}{5 - x}$

i) $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 3)^{20} (3x + 2)^{30}}{(1 + 2x)^{50}}$

j) $J = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}$

k) $K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}$

l) $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 3}{6x + \sqrt{4x^2 + x} + 3}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0.$

b) Ta có: $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x^3 \sqrt[3]{8 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}} = \frac{0}{2} = 0.$

c) Ta có: $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{1}{2}.$

d) Ta có:

$$D = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{e) } E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(2 - \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)}{\left(2 - \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{0-0+0}{2-0} = 0$$

$$\text{f) } F = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3\left(2 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)}{\left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{2+0-0}{-1-0+0} = -2$$

$$\text{g) } G = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2\left(3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x}} \right) = +\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x}} = 3$$

$$\text{h) } H = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3\left(2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)}{x\left(\frac{5}{x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 \cdot \frac{2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{\frac{5}{x} - 1} \right) = -\infty,$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{\frac{5}{x} - 1} = -2$$

$$\text{i) } I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{20}\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \cdot x^{30}\left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{x^{50}\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \cdot \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}} = \frac{(2-0)^{20}(3+0)^{30}}{(2+0)^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

$$\text{j) } J = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2x}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2\right)}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2}{2+\frac{3}{x}} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{k) } K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2x}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2\right)}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2}{2+\frac{3}{x}} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{l) } L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+3}{6x+\sqrt{4x^2+x+3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+3}{6x-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8+\frac{3}{x}}{6-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = 2$$

Bài tập 2: Tính các giới hạn sau đây:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+4x} \right)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 + 5x - 2} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\sqrt{2} \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 1} \right)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} + x \right)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - 2\sqrt{x^2 - x} + x \right)$$

Lời giải

a) Khi $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x} \square \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} = 0 \longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 3x) - (x^2 + 4x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x}} + |x| \sqrt{1 + \frac{4}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

» Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x}$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x}} \square \frac{-x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

b) $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} \square \sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{2x} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1-2x-1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{x^2 \left(2 - \frac{1}{x} \right)^2} + \sqrt[3]{x^2 \left(4 - \frac{1}{x^2} \right)} + \sqrt[3]{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} \right)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{x^2} \left[\sqrt[3]{\left(2 - \frac{1}{x} \right)^2} + \sqrt[3]{4 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{\left(2 + \frac{1}{x} \right)^2} \right]} = 0. \end{aligned}$$

» Giải nhanh: $\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} =$

$$\frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{4x^2-1} - \sqrt[3]{(2x+1)^2}} \square \frac{-2}{\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}} \rightarrow 0.$$

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = 0 - 1 = -1.$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 + 5x - 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[x^2 + 5x + 4 - (x^2 + 5x - 2) \right]}{\sqrt{x^2 + 5x + 4} + \sqrt{x^2 + 5x - 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[x^2 + 5x + 4 - x^2 - 5x + 2 \right]}{\sqrt{x^2 + 5x + 4} + \sqrt{x^2 + 5x - 2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 5x + 4} + \sqrt{x^2 + 5x - 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}} \right)} = 3.$$

e) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\sqrt{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x}} - x\sqrt{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - \sqrt{2} \right) = -\infty,$

vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - \sqrt{2} \right) = 1 - \sqrt{2} < 0.$

f) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = 0$

vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{4}.$

g) Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x}} - x}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x}} - 1} = -2$$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - 2\sqrt{x^2 - x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} + x - \sqrt{x^2 - x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} + \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \right) = \frac{3}{2}.$$

Dạng 3: Giới hạn một bên của hàm số

Phương pháp: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} +\infty & \Leftrightarrow L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0 \\ -\infty & \Leftrightarrow L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0 \end{cases}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty & \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ và } L.g(x) > 0 \\ -\infty & \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ và } L.g(x) < 0 \end{cases}$$

Chú ý: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+3}{2-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3-x^2}{1-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{1-x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-2} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^3-16x}{|x+4|}$

f) $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{\sqrt{x^2-16}}{|x+4|}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{2-x^2-3x}$

Lời giải

a) Ta có:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+3) = 7 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x) = 0 \\ 2-x < 0 \text{ khi } x \rightarrow 2^+ \end{cases} \quad \text{nên } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+3}{2-x} = -\infty.$$

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3-x^2}{1-x} = -\infty$ vì
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) = 0 \\ 1-x < 0, \forall x > 1 \end{cases}.$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{(-x-1)(-x+4)}}{(-x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{-x-1}(x-1)} = -\infty$$

Do $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (\sqrt{-x+4}) = \sqrt{5}$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (\sqrt{-x-1}(x-1)) = 0, \sqrt{-x-1}(x-1) < 0, \forall x < -1.$

d)
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{(x+1)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-(x+1)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (1-(x+1)(\sqrt{x+2}+2)) = -11$

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$ và $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-2} \right) = -\infty$

e) Do $x \rightarrow -4^+ \Rightarrow x > -4 \Rightarrow x+4 > 0$ nên
$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x(x^2-16)}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4^+} x(x+4) = 32$$

f) Do $x \rightarrow -4^- \Rightarrow x < -4 \Rightarrow x + 4 < 0$ nên $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{-(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{\sqrt{4 - x}}{\sqrt{-x - 4}} = +\infty$.

g) Do $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow 2 - x > 0$

Nên $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - x}{(2 - x)(1 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{1 - 2x} = -\frac{1}{3}$.

h) Do $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1|}{2 - x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{(1 - x)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{3}$.

Bài tập 2: Cho hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{vô } x < 1 \\ \sqrt{3x^2 + 1} & \text{vô } x \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{1 - x} & \text{vô } x < 1 \\ \sqrt{2x - 2} & \text{vô } x \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Lời giải

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{vô } x < 1 \\ \sqrt{3x^2 + 1} & \text{vô } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ là

Do $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{3x^2 + 1} = \sqrt{3 \cdot 1^2 + 1} = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{1 - x} & \text{vô } x < 1 \\ \sqrt{2x - 2} & \text{vô } x \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Do $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{1 - x} = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 0 \text{ \& } 1 - x > 0 (\forall x < 1) \end{cases}$.

Bài tập 3: Tìm các giới hạn một bên và giới hạn (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2} & \text{khi } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} & \text{khi } x > 3 \end{cases}$ khi $x \rightarrow 3$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{4(3x^2 - 5x + 2)} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ khi $x \rightarrow 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ 5 + \frac{4-x}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ khi $x \rightarrow 0$

Lời giải

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = +\infty$

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

b) Ta có : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{4}$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{4(3x^2 - 5x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{4(x-1)(3x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-2)}{4(3x-2)} = -\frac{1}{4} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

c) Ta có :

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = -1$;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(5 + \frac{4-x}{x+1} \right) = 9 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Bài tập 4: Gọi a, b là các giá trị để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ x + 1, & x \geq -1 \end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới

-1. Tính $a - b$.

Lời giải

Do hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -1 nên $x = -1$ là nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$, do đó ta $1 - a + b = 0 \Leftrightarrow b = a - 1$.

Ta viết lại hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1+a}{x-1}, & x < -1 \\ x+1, & x \geq -1 \end{cases}$.

Mặt khác giới hạn cần tìm tồn tại $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Leftrightarrow \frac{a-2}{-2} = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow b = 1$.

Do đó $a - b = 1$.

Dạng 4: Bài toán thực tế và liên môn

Phương pháp: Sử dụng các định nghĩa, định lý để áp dụng vào giải các bài toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một hồ nuôi tôm chứa $600m^3$ nước mặn với nồng độ muối $1kg/m^3$. Chủ hồ nuôi tôm dự định chuyển đổi giống mới nên bơm nước vào hồ với vận tốc $3m^3/phút$ để làm ngọt hóa nước trong hồ.

a) Viết biểu thức $C(x)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau x phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

Lời giải

a) Khối lượng muối có trong hồ nuôi tôm là: $1.600 = 600 \text{ (kg)}$.

Sau x phút, lượng nước trong hồ là: $600 + 3x \text{ (m}^3\text{)}$.

Nồng độ muối tại thời điểm x phút kể từ khi bơm thêm nước ngọt vào là: $C(x) = \frac{600}{600 + 3x}$.

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{600}{600 + 3x} = 0$.

Ý nghĩa: Điều này có nghĩa là khi t càng lớn thì nồng độ muối trong hồ sẽ dần về 0. Tức là đến một thời điểm nào đó muối trong hồ không còn đáng kể và nước trong hồ coi như nước ngọt.

Bài tập 2: Một công ty sản xuất giày da đã xác định được rằng, tính trung bình một công nhân có thể làm được $f(x) = \frac{16x}{15 + 2x}$ đôi giày mỗi ngày sau khi được đào tạo t ngày. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x}{15 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{\frac{15}{x} + 2} = \frac{16}{2} = 8$.

Ý nghĩa: Khi thời gian đào tạo tăng lên thì số đôi giày mỗi công nhân sản xuất được trong một ngày cũng được tăng lên nhưng không quá 8 đôi giày/ngày.

Bài tập 3: Chi phí để sản xuất x chai nước ngọt của công ty nước giải khát A được xác định bởi hàm số $F(x) = 50000 + 15x$ (đơn vị: nghìn đồng).

a) Tính chi phí trung bình $\bar{F}(x)$ để công ty sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{F}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là: $\bar{F}(x) = \frac{50000 + 15x}{x}$ (nghìn đồng).

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{F}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50000 + 15x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{50000}{x} + 15}{1} = 15$ (nghìn đồng).

Ý nghĩa: Khi số sản phẩm công ty sản xuất ra càng nhiều thì chi phí trung bình để sản xuất ra một sản phẩm sẽ giảm dần, số sản phẩm x đủ lớn thì chi phí trung bình xấp xỉ 15 nghìn đồng mỗi sản phẩm và không thể thấp hơn.

Bài tập 4: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm Thủ Thiêm trong một giây được cho bởi công thức $f(v) = \frac{400v}{v^2 + 3v + 6}$, trong đó $v(m/s)$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim_{v \rightarrow 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có: $\lim_{v \rightarrow 20} f(v) = \lim_{v \rightarrow 20} \frac{400v}{v^2 + 3v + 6} = \frac{400.20}{20^2 + 3.20 + 6} \approx 17$.

Ý nghĩa: Khi các xe vào đường hầm với vận tốc xấp xỉ $20m/s$ thì trung bình mỗi giây có khoảng 17 xe vào đường hầm.

Bài tập 5: Một bar ngoài trời ở khu du lịch A đã xác định được rằng, tính trung bình một ngày số lượng khách du lịch đến bar được xác định bởi công thức $f(x) = \frac{6000x}{50+12x}$ khách mỗi ngày sau khi số nhân viên của bar được tăng lên x nhân viên. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6000x}{50+12x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6000}{\frac{50}{x} + 12} = \frac{6000}{12} = 500.$$

Ý nghĩa: Khi số nhân viên trong bar tăng lên thì số khách đến bar trong một ngày cũng được tăng lên nhưng không quá 500 khách/ ngày.

Bài tập 6: Chi phí để sản xuất x kg chả mực của cửa hàng bán chả mực A được xác định bởi hàm số $F(x) = 60000 + 320x$ (đơn vị: nghìn đồng).

- Tính chi phí trung bình $\bar{F}(x)$ để công ty sản xuất x kg chả mực.
- Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{F}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là: $\bar{F}(x) = \frac{6000 + 320x}{x}$ (nghìn đồng).

$$\text{b) Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{F}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6000 + 320x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{6000}{x} + 320}{1} = 320 \text{ (nghìn đồng).}$$

Ý nghĩa: Khi khối lượng chả mực cửa hàng sản xuất ra càng nhiều thì chi phí trung bình để sản xuất ra một kg sản phẩm sẽ giảm dần, số sản phẩm x đủ lớn thì chi phí trung bình xấp xỉ 320 nghìn đồng mỗi kg chả mực và không thể thấp hơn.

Bài tập 7: Trong thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện

gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

Lời giải

Từ công thức khối lượng $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, ta thấy m là một hàm số của v , với tập xác định là nửa

khoảng $[0; c)$. Rõ ràng khi v tiến gần tới vận tốc ánh sáng, tức là $v \rightarrow c^-$, ta có $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 0$.

Do đó $\lim_{v \rightarrow c^-} m(v) = +\infty$, nghĩa là khối lượng m của vật trở nên vô cùng lớn khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng.

Bài tập 8: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t) = 45t^2 - t^3$ (người).

Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là $v_{tb} = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$. Tính $\lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10}$

và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

Lời giải

$$\text{Ta có } g(10) = 45 \cdot 10^2 - 10^3.$$

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } \lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10} &= \lim_{t \rightarrow 10} \frac{45t^2 - t^3 - 45 \cdot 10^2 - 10^3}{t - 10} = \lim_{t \rightarrow 10} \frac{45(t^2 - 10^2) - (t^3 - 10^3)}{t - 10} \\ &= \lim_{t \rightarrow 10} \frac{45(t - 10)(t + 10) - (t - 10)(t^2 + 10t + 100)}{t - 10} = \lim_{t \rightarrow 10} [45(t + 10) - (t^2 + 10t + 100)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 10} (-t^2 + 35t + 350) = 600.\end{aligned}$$

Ý nghĩa: Từ kết quả trên, ta thấy tốc độ tăng người bệnh ngay tại thời điểm $t = 10$ ngày là 600 người/ngày.

Bài tập 9: Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Nước muối có chứa 30 gam muối trên mỗi lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25 lít/phút.

- a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút (tính bằng khối lượng muối chia thể tích nước trong bể, đơn vị g/l) là $C(t) = \frac{30t}{200 + t}$.
- b) Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả đó.

Lời giải

- a) Sau t phút thì lượng muối trong bể là $30 \cdot 25 \cdot t = 750t$ (g) và thể tích nước trong bể là $5000 + 25t$ (l).

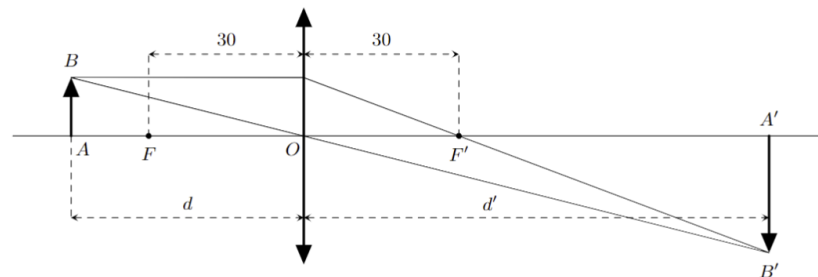
Vậy nồng độ muối của nước trong bể sau t phút là $C(t) = \frac{750t}{5000 + 25t} = \frac{30t}{200 + t}$ (g/l).

- b) Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{200 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30}{\frac{200}{t} + 1} = \frac{30}{1} = 30$.

Ý nghĩa: Theo kết quả đó, ta thấy khi lượng nước trong bể tăng theo thời gian đến vô hạn thì nồng độ muối của nước sẽ tăng dần đến giá trị 30 (g/l), tức là xấp xỉ nồng độ muối của loại nước muối cho thêm vào bể.

Bài tập 10: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như hình vẽ. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.

- a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.
- b) Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.



Lời giải

- a) Theo giả thiết: $\frac{1}{d'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d} \Leftrightarrow \frac{1}{d'} = \frac{d - f}{df} \Leftrightarrow d' = \frac{df}{d - f}$.

b) Ta có: $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f} = +\infty$; $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^-} \frac{df}{d-f} = -\infty$.

Và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f} \frac{df}{d-f} = \infty$.

Ý nghĩa: Khi khoảng cách của vật tới thấu kính mà gần với tiêu cự thì khoảng cách ảnh của vật đến thấu kính ra xa vô tận nên lúc đó bằng mắt thường mình không nhìn thấy.

Bài tập 11: Một công ty sản xuất máy tính cầm tay đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $C(t) = \frac{30t}{5+t}$ ($t \geq 0$) chiếc máy tính mỗi ngày sau khi được đào tạo t ngày. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả này.

Lời giải

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{5+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{30}{\frac{5}{t} + 1} \right) = 30$

Ý nghĩa: Khi thời gian đào tạo một nhân viên tăng lên thì số máy tính trung bình mỗi nhân viên lắp ráp được trong một ngày cũng tăng lên, như không quá 30 chiếc mỗi ngày.

Bài tập 12: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F(x) = 60000 + 250x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{F}(x)$ để công ty sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{F}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là $\bar{F}(x) = \frac{60000 + 250x}{x}$ (nghìn đồng).

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{F}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60000 + 250x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{60000}{x} + 250 \right) = 250$ (nghìn đồng).

Ý nghĩa: Khi số sản phẩm công ty sản xuất ra càng nhiều thì chi phí trung bình để sản xuất ra một sản phẩm sẽ giảm dần, số sản phẩm x đủ lớn thì chi phí trung bình xấp xỉ 250 (nghìn đồng) mỗi sản phẩm và không thể thấp hơn.

Bài tập 13: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm trong 1 giây được cho bởi công thức sau đây:

$$f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}, \text{ trong đó } v \text{ (m/s) là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm}$$

$\lim_{v \rightarrow 15} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có: $\lim_{v \rightarrow 15} f(v) = \lim_{v \rightarrow 15} \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264} = \frac{290,4 \cdot 15}{0,36 \cdot 15^2 + 13,2 \cdot 15 + 264} \approx 8$.

Ý nghĩa: Khi các xe vào đường hầm với vận tốc xấp xỉ 20 (m/s) thì trung bình mỗi giây có khoảng 8 xe vào đường hầm.

Bài tập 14: Một hồ nước chứa 500 m^3 nước mặn với nồng độ muối $6 \text{ kg} / \text{m}^3$. Người ta dự định ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước vào hồ với vận tốc $3 \text{ (m}^3 / \text{phút)}$.

a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

Lời giải

a) Khối lượng muối có trong hồ là $500.6 = 3000 \text{ (kg)}$.

Sau t phút, lượng nước trong hồ là $500 + 3t \text{ (m}^3\text{)}$.

Nồng độ muối tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $C(t) = \frac{3000}{500 + 3t} \text{ (kg / m}^3\text{)}$.

b) Ta có:
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3000}{500 + 3t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3000}{t}}{\frac{500}{t} + 3} = \frac{0}{3} = 0.$$

Điều này có nghĩa là khi t càng lớn thì nồng độ muối trong hồ sẽ dần về 0. Tức là, đến một thời điểm nào đó nồng độ muối trong hồ không còn đáng kể và nước trong hồ xem như nước ngọt.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ là

A. 37.

B. 38.

C. 39.

D. 40.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11) = 3.2^2 + 7.2 + 11 = 37.$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ là

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4| = |\sqrt{3}^2 - 4| = 1$.

Câu 3: Cho $H = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x}+1}$ và $K = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^3 + x + 3}$. Tính $H + K$.

- A. 0. B. 5. C. $-\frac{3}{5}$. D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Ta có : $H = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x}+1} = 0$ và $K = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{x^3 + x + 3} = \frac{3}{5}$ nên $H + K = \frac{3}{5}$.

Câu 4: Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x^2-2)}{x^2+x+3} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$; $b < 0$. Biết $\frac{a}{b}$ tối giản thì $a+b$ bằng bao nhiêu ?

- A. -3. B. -6. C. 3. D. 1.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x^2-2)}{x^2+x+3} = \frac{2}{-5} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \end{cases}$ nên $a+b = 2+(-5) = -3$.

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}$ là

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. 5.

Lời giải

Ta có : $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}} = \sqrt{\frac{9.3^2-3}{(2.3-1)(3^4-3)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2-x-1}{x^2+2x}}$ là

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2-x-1}{x^2+2x}} = \sqrt[3]{\frac{2^2-2-1}{2^2+2.2}} = \frac{1}{2}$.

Câu 7: Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{4x+4}+2} = \frac{a}{b}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $a+b=3$. B. $b=4a$. C. $4b=a$. D. $ab=1$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{4x+4}+2} = \frac{1}{4}$, chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$ nên $b=4a$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x^2+1}+ax)$ là 0.

- A. $-\frac{2}{3}$. B. $-\frac{9}{6}$. C. 0. D. Không có giá trị a .

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x^2+1}+ax) = 3+2a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$.

- Câu 9:** Biết rằng $b < 0$, $a + b = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-b+x}}{x+1} = -2$. Khẳng định nào dưới đây sai?
- A. $8 < a < 13$. B. $b < -1$. C. $a^2 + b^2 > 10$. D. $a - b > 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-b+x}}{x+1} = \frac{1 - \sqrt{1-b}}{1} = -2 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-b} = -2 \Leftrightarrow b = -8.$$

$$\text{Mà } a + b = 5 \Leftrightarrow a + (-8) = 5 \Leftrightarrow a = 13.$$

- Câu 10:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 5$. Khi đó hãy tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-4 + \sqrt[3]{5f(x) + 7}}{x^2 + x}.$$

- A. 4. B. -2. C. -1. D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 5 \Leftrightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow -3} (f(x) - 2)}{\lim_{x \rightarrow -3} (x + 2)} = 5 \Leftrightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow -3} f(x) - 2}{-1} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -3.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-4 + \sqrt[3]{5f(x) + 7}}{x^2 + x} = \frac{-4 + \sqrt[3]{5 \cdot (-3) + 7}}{(-3)^2 - 3} = -1.$$

- Câu 11:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3}$ có kết quả là

- A. -2. B. $+\infty$. C. 3. D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2$$

- Câu 12:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 3}{6x^2 + x + 1}$ có kết quả là

- A. -2. B. $+\infty$. C. 3. D. 0.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 3}{6x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}{6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$$

- Câu 13:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3}$ có kết quả là

- A. -2. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} \right) = -\infty.$$

Câu 14: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x} + 2x}$ có kết quả là

- A. $-\frac{1}{5}$. B. $+\infty$. C. $-\infty$. **D. $\frac{1}{5}$.**

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x} - 1}{\sqrt{9 - \frac{3}{x}} + 2} = \frac{1}{5}.$$

Câu 15: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x} + 2x}$ có kết quả là

- A. $-\frac{1}{5}$. **B. 3.** C. -3 . D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x} - 1}{-\sqrt{9 - \frac{3}{x}} + 2} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Câu 16: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ có kết quả là

- A. -2 . B. $+\infty$. C. 3. **D. -1 .**

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1} = -1$$

Câu 17: Cho $a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x - 1} = 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $a < -1$. B. $-1 \leq a \leq 1$. C. $1 \leq a < 2$. **D. $a \geq 2$.**

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x - 1} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(a + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = 2 \Leftrightarrow \frac{a + 1}{2} = 2 \Leftrightarrow a = 3.$$

Vậy $a = 3$.

Câu 18: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x^2 + 1)^3 (1 - 2x)^{94}}{2x^{100} + 3}$ có kết quả là

- A. $-\infty$. B. -2^{100} . C. 2^{93} . **D. -2^{93} .**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x^2 + 1)^3 (1 - 2x)^{94}}{2x^{100} + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[x^2 \left(-1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]^3 \left[x \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \right]^{94}}{x^{100} \left(2 + \frac{3}{x^{100}} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 \left(-1 + \frac{1}{x^2} \right)^3 x^{94} \left(\frac{1}{x} - 2 \right)^{94}}{x^{100} \left(2 + \frac{3}{x^{100}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(-1 + \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(\frac{1}{x} - 2\right)^{94}}{2 + \frac{3}{x^{100}}} = \frac{(-1)^3 \cdot (-2)^{94}}{2} = -2^{93}$$

Câu 19: Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - \sqrt{4x^2 - x + 1}}{a^2x - 1} = \frac{2}{3}$ với $a = \frac{m + \sqrt{57}}{n} > 0$ và $m; n$ là số nguyên dương. Khi đó giá trị của biểu thức $S = m + n$ là

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - \sqrt{4x^2 - x + 1}}{a^2x - 1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(a + \sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x \left(a^2 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{a + 2}{a^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 3a - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3 + \sqrt{57}}{4} \text{ (N)} \\ a = \frac{3 - \sqrt{57}}{4} \text{ (L)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow S = 7. \text{ Vậy } S = 7.$$

Câu 20: Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 4}{mx - 2} = \frac{1}{2}$. Khi đó m thuộc tập hợp nào?

- A. $[3; 6]$. B. $[-3; 0]$. C. $[-6; -3]$. D. $[1; 3]$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 4}{mx - 2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x} \right)}{x \left(m - \frac{2}{x} \right)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2}{m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -4.$$

Vậy $m = -4 \in [-6; -3]$.

Câu 21: Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2)$.

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 1. D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty,$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = 1 > 0.$$

Câu 22: Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

- A. 1. B. 0. C. $-\infty$ D. $+\infty$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^2} = -\infty \text{ vì } \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1 < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ và } x^2 > 0 \text{ với mọi } x \neq 0.$$

Câu 23: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2})$ là:

- A. $\sqrt[3]{3} + 1$. B. $+\infty$. C. $\sqrt[3]{3} - 1$. D. $-\infty$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = +\infty,$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = \sqrt[3]{3} + 1 > 0.$$

Câu 24: Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x} \right)$.

A. $\frac{7}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $+\infty$.

D. $-\infty$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 25: Cho biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{5x^2 + 2x} + x\sqrt{5} \right) = a\sqrt{5} + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $S = 5a + b$.

A. -5 .

B. -1 .

C. 1 .

D. 5 .

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{5x^2 + 2x} + x\sqrt{5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{5x^2 + 2x} - x\sqrt{5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{5 + \frac{2}{x}} - \sqrt{5}} = -\frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

Suy ra: $a = -\frac{1}{5}$, $b = 0$. Vậy $S = -1$.

Câu 26: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x - \sqrt{9x^2 - 1} \right)$ bằng:

A. $+\infty$.

B. 0 .

C. $-\infty$.

D. -1 .

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x - \sqrt{9x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + x\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(3 + \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}} \right) = -\infty,$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}} \right) = 6 > 0.$$

Câu 27: Biết rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} + ax - b \right) = -5$. Tính tổng $a + b$.

A. 6 .

B. 7 .

C. 8 .

D. 5 .

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} + ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a+1)x^2 - (2a+b)x + 2b+1}{x-2} \right) = -5.$$

Khi $a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$, ta được $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a+1)x^2 - (2a+b)x + 2b+1}{x-2} \right) = +\infty$ (không thỏa mãn)

Khi $a+1 < 0 \Leftrightarrow a < -1$, ta được $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a+1)x^2 - (2a+b)x + 2b+1}{x-2} \right) = -\infty$ (không thỏa mãn)

Khi $a+1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$, ta được:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a+1)x^2 - (2a+b)x + 2b+1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-(-2+b)x + 2b+1}{x-2} \right) = 2-b$$

Do đó, $2-b = -5 \Leftrightarrow b = 7$. Vậy $a+b = 6$.

Câu 28: Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + 2x)$.

A. 2.

B. $-\infty$.

C. 1.

D. $+\infty$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \right) = -\infty \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = 1. \end{aligned}$$

Câu 29: Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 2})$.

A. -1.

B. $-\infty$.

C. $+\infty$.

D. 1.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 2}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 2} + (\sqrt[3]{x^3 + 2})^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-2}{x^2 \left(1 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} \right)^2 \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\frac{-2}{x^2}}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} \right)^2} \right) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 2}) = 1.$$

Câu 30: Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b)) = 0$. Tính $a - 4b$.

A. 3.

B. 5.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x} \right).$$

$$\text{Nếu } a > 2 \text{ thì } L = -\infty \text{ vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x} \right) = 2 - a < 0.$$

Tương tự nếu $a < 2$ thì $L = +\infty$.

$$\text{Từ đó suy ra } a = 2. \text{ Khi đó } L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (2x + b)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-3 - 4b)x + 1 - b^2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + 2x + b}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 - 4b + \frac{1 - b^2}{x}}{\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 + \frac{b}{x}} = \frac{-3 - 4b}{4} \text{ suy ra } -3 - 4b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{3}{4}.$$

Vậy $a - 4b = 5$.

Câu 31: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{4x^2 + 1} - x)$

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. -3 .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{4x^2 + 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{4x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{4x^2 + 1} + x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x(\sqrt{4x^2 + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 \cdot \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = -3. \end{aligned}$$

Câu 32: Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$

- A. $+\infty$. B. 0. C. $-\infty$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{(x^3 - 1)^2 x}{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{(x-1)^2 (x^2 + x + 1)^2 x}{(x-1)(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{(x-1)(x^2 + x + 1)^2 x}{(x+1)}} = 0. \end{aligned}$$

Câu 33: Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}}$ bằng

- A. $+\infty$. B. 0. C. $-\infty$. D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{(x-2)(x+2)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} \sqrt{\frac{x}{x+2}} = 0.$$

Câu 34: Kết quả của $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3 + x^2 + 2}}$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3 + x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^3 + x^2}{3x^3 + x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 35: Kết quả của $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2x) \sqrt{\frac{3x-11}{x^3-1}}$ bằng

- A. $-2\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $-\infty$. D. 0.

Lời giải

$$\text{Khi } x \rightarrow +\infty \text{ thì } 1-2x < 0 \text{ nên ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2x) \sqrt{\frac{3x-11}{x^3-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{\frac{(1-2x)^2 (3x-11)}{x^3-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} - \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{x^2} - 2\right)^2 \left(3 - \frac{11}{x}\right)}{1 - \frac{1}{x^3}}} = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}.$$

Câu 36: Kết quả của $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) \sqrt{\frac{3x}{x^2-1}}$ bằng

A. $-2\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $1+x > 0$ nên ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) \sqrt{\frac{3x}{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(1+x)^2 3x}{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 \cdot 3x}{1 - \frac{1}{x^2}}} = +\infty.$$

Câu 37: Kết quả của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{x^2+16} - x)$ bằng

A. $-\infty$.

B. 4.

C. 0.

D. $+\infty$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{x^2+16} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{x^2+16-x^2}{\sqrt{x^2+16}+x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{16}{\sqrt{x^2+16}+x} \right) = 0.$$

Câu 38: Kết quả của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{x^2+16})$ bằng

A. -1.

B. -4.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2+16} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot |x| \sqrt{1 + \frac{16}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot (-x) \sqrt{1 + \frac{16}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{16}{x^2}} = -1.$$

Câu 39: Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-9}} \right)$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-9}} \right) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) = 0.$$

Câu 40: Kết quả của $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3+1) \cdot \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$ bằng

A. 2.

B. 0.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3+1) \cdot \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1)(x^2-x+1) \sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{x+1} (x^2-x+1) \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 0. \end{aligned}$$

Câu 41: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+2}{x-2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{1}{2}$. D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+2) = 6 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+2}{x-2} = +\infty.$$

Câu 42: Tính $N = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x-3}$.

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 2. D. -3.

Lời giải

$$\text{Ta có } N = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x-3} = +\infty \text{ vì } \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+2) = 3+2 = 5 > 0$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0; x-3 > 0 \text{ khi } x \rightarrow 3^+.$$

Câu 43: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+2}{x-3}$ bằng

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 2. D. -3.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+2}{x-3} = -\infty \text{ (vì } \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x+2) = 3 \cdot 3 + 2 = 11 > 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0; x-3 < 0).$$

Câu 44: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x-3}{x-1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 3. D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x-3) = 1 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x-3}{x-1} = -\infty.$$

Câu 45: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1}$ bằng

- A. $+\infty$. B. 1. C. 0. D. $-\infty$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-1) = 1 > 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \text{ và } x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0 \text{ suy ra } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = +\infty.$$

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -5$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$. B. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$.
C. Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. D. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -5$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \text{ suy ra không tồn tại } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

Câu 47: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 4}$ bằng:

- A. $-\infty$. B. 3. C. 0. D. $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x - 1) = 5 > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = 0$ và $x^2 - 4 > 0$ khi $x \rightarrow 2^+$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 4} = +\infty$.

- Câu 48:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để $I < 12$ biết $I = \lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 2mx + m^2 + 3)$
- A. 6. **B.** 5. C. 8. D. 7.

Lời giải

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 2mx + m^2 + 3) = (-1)^4 - 2m(-1) + m^2 + 3 = m^2 + 2m + 4$.

$$I < 12 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 4 < 12 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 2.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$.

- Câu 49:** Giả sử ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$. B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = a - b$.
- C.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$. D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = a + b$.

Lời giải

Vì b có thể bằng 0 nên mệnh đề sai là $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

- Câu 50:** Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 - 3x^3 + x + 1)$.

- A. 0. **B.** $+\infty$. C. $-\infty$. D. -4.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 - 3x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(-4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) = +\infty$.

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) = -4 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty \end{cases}.$$

- Câu 51:** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{4x+2}$.

- A.** $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{-1}{4}$. D. $\frac{-1}{2}$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{4x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

- Câu 52:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 9}$ bằng

- A. $-\infty$. B. 1. **C.** 0. D. $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 9) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 9} = 0.$

Câu 53: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + x} + x)$?

- A.** $+\infty$. **B.** -1 . **C.** $-\infty$. **D.** 0 .

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} \right)} + x \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{2 + \frac{1}{x}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + 1 \right) \right].$

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + 1 \right) = 1 - \sqrt{2} < 0$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + x} + x) = +\infty$.

Câu 54: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

- A.** 0 . **B.** -2 . **C.** $-\infty$. **D.** 2 .

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}} = -2.$

Câu 55: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{cx^2+a}{x^2+b}$ bằng

- A.** a . **B.** b . **C.** c . **D.** $\frac{a+b}{c}$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{cx^2+a}{x^2+b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c+\frac{a}{x^2}}{1+\frac{b}{x^2}} = \frac{c+0}{1+0} = c.$

Câu 56: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$?

- A.** 0 . **B.** $-\infty$. **C.** -1 . **D.** 1 .

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = -1.$

Câu 57: Để $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2} = \frac{1}{2}$, Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $[3;6]$.

B. $[-3;0]$.

C. $[-6;-3]$.

D. $[1;3]$.

Lời giải

Khi $m=0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x}}{2} = -\infty$ nên $m=0$ không thỏa mãn.

Khi $m \neq 0$, ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x}}{m-\frac{2}{x}} = -\frac{2}{m}$.

Theo bài ra ta có: $-\frac{2}{m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -4 \in [-6;-3]$.

Câu 58: Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}} = +\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 - 2a + 4$ là

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{((2-a)x-3)(x+\sqrt{x^2+1})}{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[-\left((2-a) - \frac{3}{x} \right) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \right] = +\infty \Rightarrow -(2-a) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2$.

Với $a \geq 2 \Rightarrow a(a-2) \geq 0$ suy ra $P = a(a-2) + 4 \geq 4$. Dấu “=” xảy ra khi $a = 2$. Vậy GTNN của P là 4.

Câu 59: Trong hồ có chứa 7000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút. Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

A. $C(t) = \frac{700+15t}{30.15t}$. B. $C(t) = \frac{30.15t}{700+15t}$. C. $C(t) = \frac{7000+15t}{30.15t}$. D. $C(t) = \frac{30.15t}{7000+15t}$.

Lời giải

Sau t phút lượng nước trong hồ là $7000+15t$ (lít)

Khối lượng muối có trong hồ tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $30.15t$ (gam)

Nồng độ muối tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $C(t) = \frac{30.15t}{7000+15t}$ (gam/lít).

Câu 60: Trong hồ có chứa 4000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 35 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút. Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

A. $C(t) = \frac{400+15t}{35.15t}$. B. $C(t) = \frac{35.15t}{400+15t}$. C. $C(t) = \frac{4000+15t}{35.15t}$. D. $C(t) = \frac{35.15t}{4000+15t}$.

Lời giải

Sau t phút lượng nước trong hồ là $4000+15t$ (lít)

Khối lượng muối có trong hồ tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $35.15t$ (gam)

Nồng độ muối tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $C(t) = \frac{35.15t}{4000 + 15t}$ (gam/lít).

Câu 61: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$

- A. 20. B. 30. C. 40. D. 50.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t\left(1 + \frac{4}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50}{1 + \frac{4}{t}} = 50.$$

Câu 62: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{40t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$

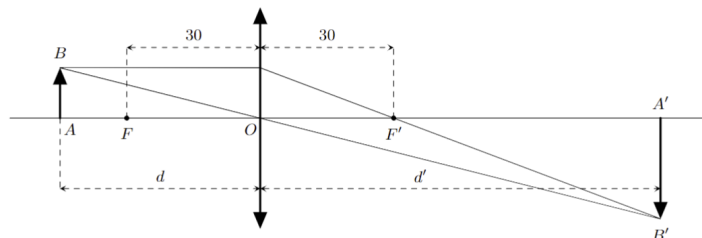
- A. 20. B. 30. C. 40. D. 50.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{40t}{t+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{40t}{t\left(1 + \frac{4}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{40}{1 + \frac{4}{t}} = 40.$$

Câu 63: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f > 0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính. Ta có công thức $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ hay $d' = \frac{df}{d-f}$

Tìm giới hạn $\lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f}$



- A. $-\infty$. B. f^2 . C. $+\infty$. D. f .

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{d \rightarrow f^+} df = f^2 \text{ và } \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{1}{d-f} = +\infty \text{ nên } \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f} = \lim_{d \rightarrow f^+} \left(df \cdot \frac{1}{d-f} \right) = +\infty.$$

Câu 64: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{30t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$.

- A. 20. B. 30. C. 40. D. 50.

Lời giải

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t\left(1+\frac{4}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30}{1+\frac{4}{t}} = 30.$

Câu 65: Một cái hồ đang chứa 400 m^3 nước mặn với nồng độ muối $10 \text{ kg} / \text{m}^3$. Người ta ngọt hóa nước hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ $3 \text{ m}^3 / \text{phút}$. Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

A. $C(t) = \frac{3}{400+3t}.$ **B.** $C(t) = \frac{400+3t}{3}.$ **C.** $C(t) = \frac{400+3t}{4000}.$ **D.** $C(t) = \frac{4000}{400+3t}.$

Lời giải

Khối lượng muối có trong hồ là $400.10 = 4000 (\text{kg})$

Sau t phút lượng nước trong hồ là $400 + 3t (\text{m}^3)$

Nồng độ muối tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $C(t) = \frac{4000}{400+3t} (\text{kg} / \text{m}^3)$

Câu 66: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm trong 1 giây được cho bởi công thức $f(v) = \frac{430v}{0,5v^2 + 16,2v + 354}$, trong đó v (m/s) là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Khi các xe vào đường hầm với vận tốc xấp xỉ 15 (m/s) thì số xe vào đường hầm mỗi giây là

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $\lim_{v \rightarrow 15} f(v) = \lim_{v \rightarrow 15} \frac{430v}{0,5v^2 + 16,2v + 354} = \frac{430.15}{0,5.15^2 + 16,2.15 + 354} \approx 9.$

Câu 67: Giả sử khoảng cách từ đỉnh của vách đá đến mặt đất là 96 ft . Một hòn đá rơi từ đỉnh của một vách đá xuống đất, sau khoảng thời gian t giây, khoảng cách của nó so với đỉnh của vách đá là $s(t) = 16t^2$. Tại thời điểm hòn đá chạm xuống đất vận tốc của hòn đá xấp xỉ bằng

A. $32\sqrt{6}.$ **B.** $16\sqrt{6}.$ **C.** 0 **D.** 32

Lời giải

Ta có: $\lim_{v \rightarrow 15} f(v) = \lim_{v \rightarrow 15} \frac{430v}{0,5v^2 + 16,2v + 354} = \frac{430.15}{0,5.15^2 + 16,2.15 + 354} \approx 9.$

Hòn đá sẽ chạm đất khi và chỉ khi $s(t) = 96 = 16t^2 \Leftrightarrow t^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{6} \text{ (tm)} \\ t = -\sqrt{6} \text{ (l)} \end{cases}$

Vậy hòn đá sẽ chạm đất tại thời điểm $t = \sqrt{6} \approx 2,4495$ (s)

Tại thời điểm hòn đá chạm xuống đất vận tốc của hòn đá là

$$\lim_{t \rightarrow \sqrt{6}} \frac{s(t) - s(\sqrt{6})}{t - \sqrt{6}} = \lim_{t \rightarrow \sqrt{6}} \frac{16t^2 - 16\sqrt{6}^2}{t - \sqrt{6}} = \lim_{t \rightarrow \sqrt{6}} 16(t + \sqrt{6}) = 32\sqrt{6} \approx 78,4.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}$ và $g(x) = \frac{2x}{x+1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -2$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{3}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = \sqrt{3} - 2$.

d) $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) - g(x)] = \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{3 \cdot 1^2+1}}{1+1} = 1$.

Và $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 \cdot (-2)}{-2+1} = 4$.

b) Đúng: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}} = 2$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{3}$.

c) Sai: Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\sqrt{3} - 2 = -\sqrt{3} - 2$.

d) Đúng: $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1} + 2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{3x^2+1} + 2x)(\sqrt{3x^2+1} - 2x)}{(x+1)(\sqrt{3x^2+1} - 2x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{(x+1)(\sqrt{3x^2+1} - 2x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x+1)(\sqrt{3x^2+1} - 2x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{\sqrt{3x^2+1} - 2x} = \frac{1}{2}$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2+a}, & x > 1 \end{cases}$ với a là tham số thực dương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = -9$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{1-x} = +\infty$.

d) Để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ thì $a = 8$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5} [2 \cdot (-5) + 1] = -9$.

b) Sai: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2+a} = \sqrt{1+a}$.

c) Sai: Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+a}}{1-x}$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2+a} = \sqrt{1+a} > 0, \forall a > 0$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) = 0$ và khi $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow 1-x < 0$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+a}}{1-x} = -\infty$.

d) Đúng: Để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$; $f(1) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2+a} = \sqrt{1+a}$.

Suy ra để hàm số tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ thì $\sqrt{1+a} = 3 \Leftrightarrow a = 8$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x^2-10x+3}{x^2-5x+6}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x) = \frac{3x^2-10x+3}{x^2-5x+6} = \frac{(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x-3)(x-2)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 8$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

Lời giải

a) Sai: $f(x) = \frac{3x^2-10x+3}{x^2-5x+6} = \frac{(x-3)(3x-1)}{(x-3)(x-2)}$

b) Đúng: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-10x+3}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3x-1)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-1}{x-2} = 8$.

c) Sai: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 3$.

d) Sai: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-1}{x-2} = +\infty$ vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} (3x-1) = 5 > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$; $x-2 > 0$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2-4x+3}{1-x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ không tồn tại.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Lời giải

a) Đúng: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 3}{1 - x} = 1$

b) Sai: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{1 - x} = 0$

c) Đúng: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} (3-x) = 2$

d) Sai: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x \left(\frac{1}{x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x} - 1\right)} = -\infty$

$$\text{Vi} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} - 1} = -1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ khi } x < 0 \\ 0 & \text{ khi } x = 0 \\ 1 & \text{ khi } x > 0 \end{cases}$. Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

a) $f(0) = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.

d) Hàm số liên tục tại $x = 0$.

Lời giải

a) Đúng: $f(0) = 0$

b) Đúng: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

c) Sai: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$. Do đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

d) Sai: Do không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 0$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -1$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3 - x^2 + x - 1} > 0.$$

$$\text{d) } \text{Đề } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{ax + b} = 2 \text{ thì } a + 3b = 1.$$

Lời giải

$$\text{a) Đúng: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1.$$

$$\text{b) Sai: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x + 1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{c) Sai: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3 - x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$\text{d) Đúng: } \text{Đề } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{ax + b} = 2 \text{ thì } ax + b \text{ có nghiệm bằng } 1 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a.$$

$$\text{Khi đó: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{ax + b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 2)(x - 1)}{a(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{a} = -\frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } a + 3b = -\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Câu 7: Cho $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$\text{a) } L = 5 \text{ khi } a = -10$$

$$\text{b) } L > 0 \text{ khi } a > 0$$

$$\text{c) } L < 0 \text{ khi } a > 0$$

$$\text{d) } L = -1 \text{ thì } a \text{ là một nghiệm của phương trình } x^2 - 3x + 2 = 0$$

Lời giải

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 5}{\sqrt{x^2 + ax + 5} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(a + \frac{5}{x} \right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a + \frac{5}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1} = -\frac{a}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{a) Đúng: Khi đó } L = 5 \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 5 \Leftrightarrow a = -10.$$

$$\text{b) Sai: Khi đó } L > 0 \Leftrightarrow -\frac{a}{2} > 0 \Leftrightarrow a < 0.$$

$$\text{c) Đúng: Khi đó } L < 0 \Leftrightarrow -\frac{a}{2} < 0 \Leftrightarrow a > 0.$$

d) Đúng: Khi đó $L = -1 \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = -1 \Leftrightarrow a = 2$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Câu 8: Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{x^2+1}+2023}{x+2024} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+bx+1}-x) = 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $a > 0$
- b) $b > 0$
- c) $a > b$
- d) $P = 4a + b = 2$

Lời giải

$$\text{a) Sai: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{x^2+1}+2023}{x+2024} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-a\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2023}{x}} \right)}{x \left(1+\frac{2024}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-a\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2023}{x}}}{1+\frac{2024}{x}} = -a.$$

$$\text{Nên } -a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

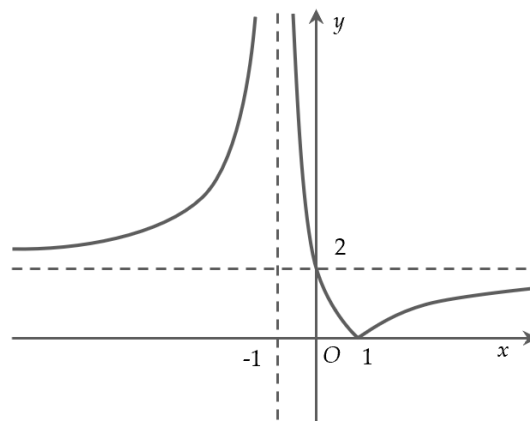
$$\begin{aligned} \text{b) Đúng: Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+bx+1}-x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+bx+1}-x)(\sqrt{x^2+bx+1}+x)}{\sqrt{x^2+bx+1}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx+1}{x \left(\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}+1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(b+\frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}+1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Nên } \frac{b}{2} = 2 \Leftrightarrow b = 4.$$

c) Sai: Có $a = -\frac{1}{2}$ và $b = 4$.

d) Đúng: Vậy $P = 4 \left(-\frac{1}{2} \right) + 4 = 2$.

Câu 9: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Lời giải

a) Đúng: Mệnh đề $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ đúng.

b) Sai: Mệnh đề $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ sai

c) Sai: Mệnh đề $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ sai.

d) Đúng: Mệnh đề $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ đúng

Câu 10: Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) a là số lẻ

b) $b > 0$

c) $a.b < 0$

d) $a - 4b = 5$

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - ax \right) - b \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1 - a^2 x^2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + ax} - b \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(4 - a^2)x^2 - 3x + 1}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + ax} - b \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - a^2 = 0 \\ a > 0 \\ \frac{-3}{2 + a} - b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

a) Sai: a là một số chẵn

b) Sai: $b < 0$

c) Đúng: $a.b < 0$

d) Đúng: $a - 4b = 5$

Câu 11: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2 + a = 18$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx} - cx \right) = -2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a = 9$

b) $b = 3c$

c) $a = 3c$

d) $P = a + b + 5c = 14$

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx} - cx \right) = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a - c^2)x^2 + bx}{\sqrt{ax^2 + bx} + cx} = -2$.

$$\text{Điều này xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c^2 = 0 & (a, c > 0) \\ \frac{b}{\sqrt{a} + c} = -2 \end{cases}. \text{ (Vì nếu } c \leq 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx} - cx) = +\infty).$$

Mặt khác, ta cũng có $c^2 + a = 18$.

$$\text{Do đó, } \begin{cases} a = c^2 = 9 \\ b = -2(\sqrt{a} + c) \end{cases} \Leftrightarrow a = 9, b = -12, c = 3. \text{ Vậy } P = a + b + 5c = 12.$$

a) Đúng: $a = 9$

b) Sai:

c) Đúng:

d) Sai: $P = a + b + 5c$

Câu 12: Cho $a, 3, c$ là các số thực khác 0. Biết giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x} + ax}{bx - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $L = 3$ khi $\frac{a-1}{b} = 3$

b) $L = 6$ khi $\frac{a-1}{b} = 4$

c) $L = 2$ khi $a + 2b = 1$

d) $L = 1$ khi $a + b = 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x} + ax}{bx - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x - (ax)^2}{(bx - 1)(\sqrt{x^2 - 3x} - ax)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x[(1 - a^2)x - 3]}{(bx - 1)(\sqrt{x^2 - 3x} - ax)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - a^2) - \frac{3}{x}}{\left(b - \frac{1}{x}\right)\left(-\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - a\right)} = \frac{(1 - a^2)}{b(-1 - a)} = \frac{a - 1}{b}. \end{aligned}$$

a) Đúng: Ta có $L = \frac{a-1}{b}$. Khi đó $L = 3$ thì $\frac{a-1}{b} = 3$

b) Sai: $L = 6$ khi $\frac{a-1}{b} = 4$

c) Đúng: Khi $L = 2$ thì $\frac{a-1}{b} = 2 \Leftrightarrow a - 1 = 2b \Leftrightarrow a - 2b = 1$

d) Đúng: Khi $L = 1$ thì $\frac{a-1}{b} = 1 \Leftrightarrow a - 1 = b \Leftrightarrow a - b = 1$

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{khi } x < -1 \\ \sqrt{x^2 + 1} & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \sqrt{5}$

b) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3$.

c) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{2}$

d) Hàm số tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow -1$

Lời giải

a) Sai: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$

b) Đúng: Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n < -1$ và $x_n \rightarrow -1$ ta có: $f(x_n) = x_n - 2$.

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x_n) = -1 - 2 = -3$.

c) Đúng: Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n > -1$ và $x_n \rightarrow -1$ ta có: $f(x_n) = \sqrt{x_n^2 + 1}$.

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x_n) = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}$.

d) Vì $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ (hay $-3 \neq \sqrt{2}$) nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x + 2} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -8$

b) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$

c) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

d) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

Lời giải

a) Sai: Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \sqrt{5}$

b) Đúng: Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n < 2$ và $x_n \rightarrow 2$ ta có: $f(x_n) = 1 - x_n^2$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x_n) = 1 - 2^2 = -3$.

c) Đúng: Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n > 2$ và $x_n \rightarrow 2$ ta có $f(x_n) = \sqrt{x_n + 2}$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x_n) = \sqrt{2 + 2} = 2$.

d) Sai: Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (hay $-3 \neq 2$) nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} + ax + b \right) = 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2024a - 4049b$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} + ax + b \right) &= 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a+1)x^2 + (a+b+3)x + b+1}{x+1} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a+1)x + (a+b+3) + \frac{b+1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ a+b+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow T = 2024a - 4049b = 2024 \cdot (-1) - 4049 \cdot (-1) = 2025. \end{aligned}$$

Câu 2: Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2023x + 2} - n\sqrt{3}) = \frac{a\sqrt{b}}{c}$, ở đó a, c là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, b là số nguyên tố. Khi đó hãy tính giá trị của $a + b + c$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a\sqrt{b}}{c} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2023x + 2}{\sqrt{3x^2 + 2023x + 2} + x\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2023 + \frac{2}{x}}{\sqrt{3 + \frac{2023}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{3}} = \frac{2023\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = 2023 + 3 + 6 = 2032.$$

Câu 3: Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} + ax - b \right) = -5$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b$

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} + ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a+1)x^2 - (2a+b)x + 2b+1}{x-2} \right) = -5$$

$$\text{Vì giới hạn là hữu hạn và bằng } -5 \text{ nên } \begin{cases} a+1=0 \\ 2a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=7 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 7 = 1,25.$$

Câu 4: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{2x^2-3x+1}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{2x^2-3x+1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4}{(2x^2-3x+1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(2x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(2x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

Câu 5: Tính giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-2x^3)^2 \cdot (4x-1)}{(x^2-1)^2 \cdot (3+2x)^3}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-2x^3)^2 \cdot (4x-1)}{(x^2-1)^2 \cdot (3+2x)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 \left(\frac{3}{x^3}-2\right)^2 \cdot x \left(4-\frac{1}{x}\right)}{x^4 \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 \cdot x^3 \left(\frac{3}{x}+2\right)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{x^3}-2\right)^2 \cdot \left(4-\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{x}+2\right)^3} = 2$$

Câu 6: Một cái hồ chứa 600 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút. Nồng độ muối trong hồ khi t dần về dương vô cùng (đơn vị: gam/lít) là bao nhiêu?

Lời giải

Sau t phút bơm nước vào hồ thì lượng nước là $600+15t$ (lít) và lượng muối có được là $30.15t$ gam.

$$\text{Nồng độ muối của nước là: } C(t) = \frac{30.15t}{600+15t} = \frac{30t}{40+t} \text{ (gam/lít).}$$

Khi t dần về dương vô cùng, ta có:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{40+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t \left(\frac{40}{t} + 1 \right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30}{\frac{40}{t} + 1} = 30 \text{ (gam/lít)}$$

Câu 7: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-x} - \sqrt[3]{x^3+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a.x}{b.x \left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 1 \right)}$ với $a; b$ là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là

phân số tối giản. Tính $P = a + b^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-x} - \sqrt[3]{x^3+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-x} - x \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-x^3-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Xét } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 \left(1-\frac{1}{x} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \sqrt{1-\frac{1}{x}} + x}.$$

$$\text{Xét } B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} = 0, \text{ do } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2} \right) = +\infty$$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-x} - \sqrt[3]{x^3+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \sqrt{1-\frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 1 \right)} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow P=2.$$

Câu 8: Hàm Heaviside có dạng $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ 1 & \text{khi } t \geq 0 \end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$. Tính $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) + \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$.

Lời giải

Xét dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n < 0$ và $t_n \rightarrow 0$, ta có $H(t_n) = 0$.

Khi đó: $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(t_n) = 0$.

Xét dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n > 0$ và $t_n \rightarrow 0$, ta có $H(t_n) = 1$.

Khi đó: $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(t_n) = 1$.

Câu 9: Biết rằng giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{\sqrt{x+9} + b} + \frac{c}{\sqrt{x+16} + d} \right]$ với $a; b; c; d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a; b; c; d$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} + \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)} + \frac{x+16-16}{x(\sqrt{x+16}+4)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{x+9}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+16}+4} \right] \end{aligned}$$

Vậy tổng các số $a; b; c; d$ là 9

Câu 10: Trong hệ trục tọa độ Oxy , lấy điểm A thuộc tia Ox và điểm $B(0;2)$ thuộc tia Oy . Giả sử hoành độ điểm A là $a > 0$. Độ dài đường cao OH của tam giác OAB được tính theo công thức $\frac{2a}{\sqrt{4+a^2}}$. Khi điểm A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương trục Ox thì độ dài AH thay đổi về gần giá trị bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Đặt } h(a) = OH = \frac{2a}{\sqrt{4+a^2}}.$$

Khi điểm A dịch chuyển ra vô cực theo tia Ox thì $a \rightarrow +\infty$.

$$\text{Ta có: } \lim_{a \rightarrow +\infty} h(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2a}{\sqrt{4+a^2}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2a}{a\sqrt{\frac{4}{a^2}+1}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{a^2}+1}} = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2.$$

Vậy khi điểm A dần về vô cực thì độ dài OH dần về 2.

Câu 11: Biết rằng giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{9x-2} + 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{a}{b\sqrt{5x-1} + 3} - \frac{c}{4 + d\sqrt{9x-2}} \right)$ với $a; b; c; d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a; b; c; d$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{9x-2} + 1}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - 3 + 4 - \sqrt{9x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{5x-1} - 3}{x-2} + \frac{4 - \sqrt{9x-2}}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{5x-1-9}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)} + \frac{16-9x+2}{(x-2)(4+\sqrt{9x-2})} \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{5(x-2)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)} + \frac{9(2-x)}{(x-2)(4+\sqrt{9x-2})} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+3} - \frac{9}{4+\sqrt{9x-2}} \right) \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=1 \\ c=9 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow S=16$$

Câu 12: Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3+2x^2)^5 \cdot (3x^3-4)^2}{(5-x^3)^2 \cdot (1-2x^2)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \frac{\left(\frac{3}{x^2}+a\right)^5 \cdot \left(b-\frac{4}{x^3}\right)^2}{\left(\frac{5}{x^3}-c\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2}-d\right)^3}$ với $a; b; c; d$ là các số tự nhiên.

Tính tích các số $a; b; c; d$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3+2x^2)^5 \cdot (3x^3-4)^2}{(5-x^3)^2 \cdot (1-2x^2)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{10} \left(\frac{3}{x^2}+2\right)^5 \cdot x^6 \left(3-\frac{4}{x^3}\right)^2}{x^6 \left(\frac{5}{x^3}-1\right)^2 \cdot x^6 \left(\frac{1}{x^2}-2\right)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \frac{\left(\frac{3}{x^2}+2\right)^5 \cdot \left(3-\frac{4}{x^3}\right)^2}{\left(\frac{5}{x^3}-1\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2}-2\right)^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=1 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow P=12$$

Câu 13: Biến đổi giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6-2x^4)^4 \cdot (2-x^2)}{(x^2-3)^5 \cdot (6-4x)}$ ta thu được kết quả dạng $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a \cdot \frac{\left(\frac{6}{x^4}-2\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{x}-4\right)}$

với a là số tự nhiên. Xác định giá trị của a .

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6-2x^4)^4 \cdot (2-x^2)}{(x^2-3)^5 \cdot (6-4x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{16} \left(\frac{6}{x^4}-2\right)^4 \cdot x^2 \left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{x^{10} \left(1-\frac{3}{x^2}\right)^5 \cdot x \left(\frac{6}{x}-4\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 \cdot \frac{\left(\frac{6}{x^4}-2\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{x}-4\right)}$$

Khi đó $a=7$.

Câu 14: Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-x^2)^6 \cdot (3x^2+2)^2}{(5x^2-3)^2 \cdot (1-2x^5)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)^6 \cdot \left(3+\frac{2}{x^2}\right)^2}{\left(5-\frac{3}{x^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^5}-2\right)^3}$ với $a; b; c; d$ là các số tự nhiên.

Tính $S=a-b$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-x^2)^6 \cdot (3x^2+2)^2}{(5x^2-3)^2 \cdot (1-2x^5)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{12} \left(\frac{4}{x^2}-1\right)^6 \cdot x^4 \left(3+\frac{2}{x^2}\right)^2}{x^4 \left(5-\frac{3}{x^2}\right)^2 \cdot x^{15} \left(\frac{1}{x^5}-2\right)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)^6 \cdot \left(3+\frac{2}{x^2}\right)^2}{\left(5-\frac{3}{x^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^5}-2\right)^3}$$

Khi đó $a = b = 2 \Rightarrow S = 0$

Câu 15: Tìm giới hạn của hàm số sau tại điểm cho trước $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$, tại $x = 1$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$.

-----HẾT-----